ISSN: 2230-9926

Available online at http://www.journalijdr.com

IJDR

International Journal of Development Research
Vol. 12, Issue, 03, pp. 54823-54826, March, 2022
https://doi.org/10.37118/ijdr.24218.03.2022

RESEARCH ARTICLE OPEN ACCESS

EL PROBLEMA DE LA INTEGRAL DE POISSON: $2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ Y DE LA FUNCIÓN GAMMA: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Rubén Darío Mendoza Arenas[1], Víctor Edgardo Rocha Fernández[2] and Marisol Paola Delgado Baltazar[3]

[1]Doctor en Educación, Universidad César Vallejo, Maestro en Ciencias de la Educación, ,Universidad Nacional Enrique Guzmán y Valle - Perú; Licenciado en Matemática y Docente nombrado; Universidad Nacional del Callao en la Facultad de Ingeniería Industrial y de Sistemas - Perú; [2]Maestro en Matemática, Pontificia Universidad Católica del Perú; Licenciado en Matemática, Docente nombrado; Universidad Nacional del Callao en la Facultad de Ingeniería Industrial y de Sistemas – Perú; [3] Bachiller en Matemática, egresada de la Maestría en Ingeniería de Sistemas y de la Maestría en Didáctica de la Enseñanza de la Física y Matemática; Universidad Nacional del Callao – Perú

ARTICLE INFO

Article History:
Received 11th January, 2022
Received in revised form
21st January, 2022
Accepted 03rd February, 2022
Published online 28th March, 2022

Key Words:
Integral de Poisson, Función Gamma, Transformada de Laplace.

Corresponding author:
Rubén Darío Mendoza Arenas

ABSTRACT

En la *Universidad Nacional del Callao* se realizó una exposición a cargo del Mg. Rubén Darío Mendoza Arenas, a modo de Conferencia titulada¨*Dos versiones del Teorema de Poisson*¨, donde se demuestra con argumentos sólidos, las dos versiones; una es haciendo uso de Integración múltiple (*Teorema de Cambio de Variable en* $\mathbb{R}^2$*usando coordenadas polares*) y la otra forma es usando propiedades básicas de Transformadas de Laplace, con una técnica paramétrica y usando el *Teorema de Fubini* (iteración de integrales dobles sobre espacios euclidianos $\mathbb{R}^2$). Este Artículo es muy importante en la *Educación Superior*, permite que el estudiante de *Ciencias y/o Ingeniería* vea la diferencia entre la abstracción y el tecnicismo, el racionalismo y el pragmatismo, ya que nuestro objetivo es captar la atención de estudiantes de Ingeniería para que se integren a la ciencia.

Citation: ***Rubén Darío Mendoza Arenas, Víctor Edgardo Rocha Fernández and Marisol Paola Delgado Baltazar.*** "El problema de la integral de poisson:$2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$Y de la función gamma: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$", *International Journal of Development Research*, 12, (03), 54823-54826.

INTRODUCIÓN

En el *Cálculo Infinitesimal* existen numerosas interrogantes: una de ellas es como poder demostrar la *integral de Poisson* $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$ con tan solo saber el Cálculo integral en una variable. Parece que no son suficientes los conocimientos de estos tópicos no tan sofisticados y avanzados, sino que se debe tener la madurez de haber llevado la Asignatura de *Análisis Matemático III*, donde se llega a *lograr concretar la meta*, y así poder afirmar que si primero es la identidad $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ o

$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$.

Pareciera la interrogante del huevo y la gallina, pero en realidad si demuestras una identidad partiendo de los temas más sencillos, se llega a demostrar la otra identidad. Acá el lector debe tener nociones básicas de integrales en una variable, integrales impropias, Función Gamma y Beta y tópicos avanzados de teoría de integración en varias variables usando*integrales dobles* o la otra forma es usando las *Transformadas de Laplace*.

MARCO TEÓRICO

Primero damos unas nociones **previas del tema a tratar:**

Integrales impropias: Según (Mitacc,2014:64) , las integrales de este tipo son de la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\,,\ \int_a^{+\infty} f(x)dx\,,\ \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

Siendo f *acotada* en el intervalo correspondiente.

Supongamos que se conoce una primitiva F de la función f, entonces:

$$I_1 = \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^n f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \big(F(n) - F(a)\big)$$

Definición 1 : Sea $f: [a, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ una función acotada.

1. Se dice que $\int_a^{+\infty} f$ es *convergente* si, y sólo si, f es Riemann integrable para todo intervalo $[a, x]$, existe el límite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^n f$$

y es un número real.

En este caso diremos que la función f es *Riemann integrable* en el intervalo $[a, +\infty)$.

2. Se dice que $\int_a^{+\infty} f$ es *divergente* si, y sólo si, f es *Riemanm integrable* para todo intervalo $[a, x]$, existe el límite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^{x_1} f$$

y no es finito.
Necesitamos además del:

Teorema de cambio de variables para integrales dobles

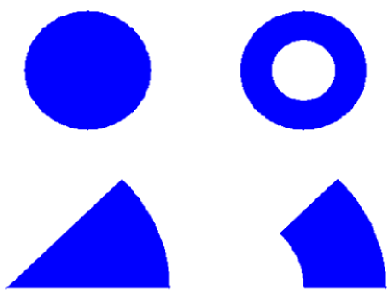
Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una *función continua* de las variables x e y definidas en la región D.

Sea $T: D' \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una *función de clase* C^1. Supongamos que T manda de manera inyectiva los puntos $(u, v) \in D$ y además supongamos que la matriz $T'(u, v)$ es invertible $\forall (u, v) \in D'$ o equivalentemente $det\big(T'(u, v)\big) \neq 0,\ \ \forall (u, v) \in D'$.

Entonces

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f\big(T(u, v)\big)\left|\det\big(T'(u, v)\big)\right|dudv$$

El cambio de variable más común en integrales dobles *es el cambio de variable a polares* que se recomienda cuando el recinto de integración es alguna de las siguientes figuras pues al hacer el cambio, se obtiene que el nuevo recinto de integración es un rectángulo:



En general, el cambio biunívoco de coordenadas cartesianas (x, y) a coordenadas polares (ρ, θ) se expresa como:

$$x = a + \rho\cos\theta\ ,\quad y = b + \rho\sin\theta$$

Donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi)$ y el punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ es conocido.

El determinante del Jacobiano es:

$$det\big(T'(\rho, \theta)\big) = det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \rho(\cos\theta)^2 + \rho(\sin\theta)^2 = \rho$$

Transformadas de Laplace

Sea $\mathcal{E}$ el *espacio vectorial* de las funciones continuas a trozos y de orden exponencial (esto es, dada una función $f(t)$*continua a trozos* existen las constantes K y ω tales que para $\forall t$ la función f está acotada en la forma

$|f(t)| \leq ke^{\omega t}$
Se define la *transformada de Laplace*$\mathcal{L}[\cdot]$ de la función $f(t) \in \mathcal{E}$ como la transformación integral

$$\mathcal{L}[f(t)] \equiv F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Transformada Inversa de Laplace

Si $F(s)$ es la *transformada de Laplace* de una función continua $f(t)$, es decir , $L[f(t)] = F(s)$ entonces la transformada inversa de Laplace de $F(s)$, escrita $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ es $f(t)$, es decir

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Ejemplo

Calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 4}\right)$$

Solución

Puesto que por Tablas se sabe que:

$$\mathcal{L}[\cos(2t)] = \frac{s}{s^2 + 4}$$

Tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 4}\right) = \cos(2t)$$

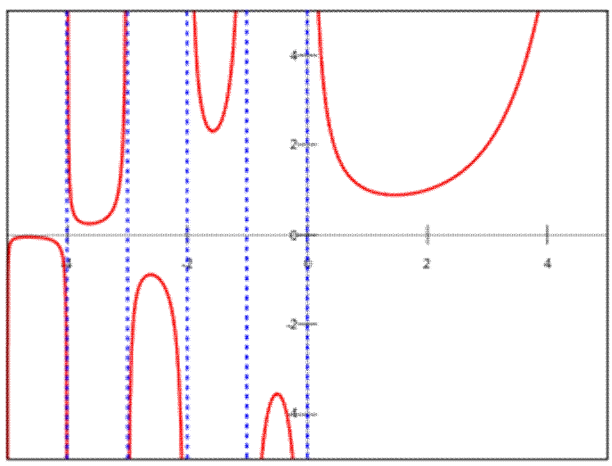
Funcion Gamma

La *función Gamma* fue definida por Euler mediante

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt\ ,\ x > 0$$

donde la condición $x > 0$ es exigida para la convergencia de la integral.

(https://es.wikipedia.org › wiki › Funcion Gamma)



Demostración con integrales dobles

Vamos a probar la igualdad $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Consideremos: $I_\rho = \int_0^\rho e^{-x^2}\,dx = \int_0^\rho e^{-y^2}\,dy$
Y sea $I = \lim_{\rho\to\infty} I_\rho$, el valor de la integral (criterio de integral impropia)
Luego

$I^2{}_\rho = \left(\int_0^\rho e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^\rho e^{-y^2}\,dy\right) = \int_0^\rho\int_0^\rho e^{-x^2-y^2}dxdy$ (por el Teorema de Fubini)

$$I^2{}_\rho = \iint_{R_\rho} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Donde R_ρ es el cuadrado ABC, de lado ρ

Sea R_1 la región en el primer cuadrante, comprendida por la circunferencia de radio ρ, es decir:

$$\iint_{R_\rho} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Y sea R_2 la región en el primer cuadrante, comprendida por la circunferencia de radio $\sqrt{2}\rho$ es decir:

$$\iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Luego:

$$\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le I^2{}_\rho \le \iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

p
Por medio de coordenadas polares (r,θ) se tiene:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^\rho e^{-r^2}rdr\right)d\theta \le I^2{}_\rho \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{2}\rho} e^{-r^2}rdr\right)d\theta$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^{-\rho^2}}{2}d\theta \le I^2{}_\rho \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^{-2\rho^2}}{2}d\theta$$
$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-\rho^2}) \le I^2{}_\rho \le \frac{\pi}{4}(1-e^{-2\rho^2})$$

Por el teorema del *Sandwich*:

$$\lim_{\rho\to\infty} I^2{}_\rho = \frac{\pi}{4}$$

Con lo que se demuestra

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Demostración usando transformadas de Laplace

Definimos la transformada de Laplace de la integral paramétrica:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t}\left(\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx\right)dt$$

Tenemos que:

$$\mathcal{L}\{e^{(-x^2)t}\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{(-x^2)t}dt$$

Entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx\right\} = \int_0^{+\infty}\mathcal{L}\{e^{(-x^2)t}\}dx$$

$$= \int_e^{+\infty}\frac{1}{s-(-x^2)}dx = \int_e^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{s}(\sec\theta)^2d\theta}{s(\sec\theta)^2} = \frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta = \frac{1}{\sqrt{s}}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Acá hemos usado el *Teorema de Cambio de Variable* de funciones reales de variable real

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx\right\} = \frac{\pi}{2\sqrt{s}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx = \frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\delta^{1/2}}\right\}$$

Por tabla:

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx = \frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(t^{-1/2}\right)$$

Acá nos damos cuenta que primero es $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right) = \frac{\pi}{2s}t^{\frac{-1}{2}}$$

Haciendo $t = 1$:

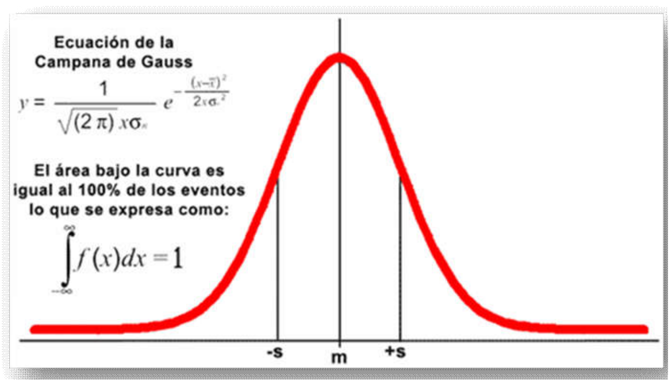
$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \int_e^{+} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

CONCLUSIONES

Aplicación en la Estadística

Distribución normal: En estadística y probabilidad se llama distribución normal, distribución de Gauss o distribución gaussiana, a una de las distribuciones de probabilidad de variable continua que con más frecuencia aparece aproximada en fenómenos reales. La gráfica de su función de densidad tiene una forma acampanada y es simétrica respecto de un determinado parámetro estadístico. Esta curva se conoce como *campana de Gauss* y es el gráfico de una *función gaussiana*



El Cálculo en una variable es la base para hacer matemática a todo nivel, puesto que las integrales de funciones en una variable nos permiten hacer cálculos de integrales dobles. Nos damos cuenta que de dos formas se puede llegar a demostrar las igualdades planteadas, pero usando integrales dobles, sale la prueba por así decirlo, más limpio y más elegante matemáticamente hablando, independientemente del otro método. Sin embargo con transformadas de Laplace, la cosa cambia, al final se usa el resultado de que

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$, siendo la conclusión principal que para este método primero sería demostrar la propiedad en mención. Es de suma importancia para un estudiante de la carrera de ciencias distinguir lo que es una demostración usando nociones previas a esta y no obviar muchas definiciones, teoremas y propiedades que permitan que un estudiante de estosciclos madure en su etapa de Pregrado en los primeros cuatro ciclos cimentando las bases sólidas para el Algebra y el Análisis.

REFERENCIAS

Direcciones electrónicas:

www.dma.uvigo.es pag.1-4
https://es.wikipedia.org › wiki › Funcion Gamma

Tesis

Chávez, Luis. (2016). "PROCESOS DE LEVY: PROPIEDADES E INTEGRACION ESTOCÁSTICA" Tesis para optar el grado de magister en Matemáticas con mención en ´ procesos estocásticos ´PUCP. Lima-Perú.

Granville-Smith-Longley "*Cálculo Diferencial e Integral*" (1998) editorial Hispano-Americana, México

Haaser-Lasalle-Sullivan "*Análisis MatemáticoI*" (1999) editorial Trillas. México

Mitacc, Máximo, "*Tópicos del Calculo I y II*" (2008) editorial San Marcos, Perú

Pita, Claudio. "*Cálculo Diferencial e Integral*" (2005) editorial Harla. México

Stewart, James. "*Cálculo en una variable*" (2010) editorial Iberoamericana. México

Venero, Armando," *Análisis Matemático I y II*" (2012) editorial Gemar, Perú

****