ISSN: 2230-9926

Available online at http://www.journalijdr.com

IJDR

International Journal of Development Research
Vol. 12, Issue, 12, pp. 60850-60857, December, 2022
https://doi.org/10.37118/ijdr.25900.12.2022

RESEARCH ARTICLE OPEN ACCESS

ANÁLISE DOS INTERVALOS ENTRE NÚMEROS PRIMOS (PRIME GAPS) COM ALGORITMOS EM C#

***Bruno Luiz Silva Rodrighero and Ilma Rodrigues de Souza Fausto**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia (IFRO) & Universidade Presbiteriana Mackenzie

ARTICLE INFO

Article History:
Received 17th September, 2022
Received in revised form
03rd October, 2022
Accepted 10th November, 2022
Published online 25th December, 2022

Key Words:

Prime-gaps; Primos; Intervalo Entre Primos; Constante de Brun; Twin Prime.

****Corresponding author:***
Bruno Luiz Silva Rodrighero

ABSTRACT

Este trabalho visa trazer ao conhecimento da comunidade científica conceitos e propriedades possivelmente relevantes sobre o intervalo entre os primos, chamados também de prime gaps. Toda a pesquisa é feita com base em dados obtidos diretamente por meio de algoritmos computacionais criados para o estudo dos primos e dos prime gaps. Estes algoritmos foram desenvolvidos pelos autores. Fundamentando-se nos dados obtidos, foi possível desenvolver e propor conjecturas para o comportamento dos prime gaps. No entanto, estes ainda estão em seus estágios iniciais e necessitam de maior quantidade de dados e uma análise mais profunda para sua futura prova ou refutação. A primeira dessas conjecturas declara que o gráfico com as primeiras ocorrências de todos os prime gaps se comportam segundo um padrão exponencial que tende ao quadrático. A segunda propõe quais sejam os únicos prime gaps que ocorrem de forma consecutivas na sequência de prime gaps. A terceira conjectura propõe a criação de uma nova sequência de intervalos, mas agora entre os prime gaps, em que seu somatório será igual a zero e consequentemente, sendo esta de fato confirmada, poderá servir como possível argumento de que o twin prime 2 ocorre infinitas vezes. A quarta e última conjectura propõe que uma nova sequência, extraída dos prime gaps, possivelmente tem sua média aritmética tendendo à constante de Brun.

Citation: *Bruno Luiz Silva Rodrighero. 2022.* "Análise dos intervalos entre números primos (prime gaps) com algoritmos em c#*", International Journal of Development Research*, 12, (12), 60850-60857.

INTRODUCTION

O estudo dos números primos tem grande relevância, não somente na matemática, mas em diversos campos do conhecimento (NEUKIRCH, 2013). Dada sua importância, diversos meios e ferramentas foram criadas durante a história para seu estudo. Um desses meios de estudar e buscar padrões nos números primos são os intervalos entre os números primos, também conhecidos como *prime gaps*[1]. Estes números já eram conhecidos e estudados desde a antiguidade (STILLWELL, 2010). Os *PGs* são uma sequência de números que podem expressar importantes propriedades do comportamento dos números primos. Mais adiante serão detalhados os principais conceitos iniciais com relação a estes números. Por ora, deve-se dizer que qualquer ferramenta ou equação que possibilite prever a sequência de *PGs* também possibilitará determinar os números primos (GRANVILLE, 1995a). Entretanto, ainda que este resultado esteja longe de ser alcançado, existem outras propriedades que podem ser extraídas e estudadas com base na sequência dos *PGs* que seriam de valia para o estudo dos primos. Neste artigo, portanto, serão estudadas algumas dessas propriedades e com base em dados obtidos por meio de algoritmos computacionais dos autores, serão propostas conjecturas preliminares que futuramente deverão ser revistas, refinadas, melhor analisadas, para que possam ser de fato provadas ou refutadas.
O estudo do comportamento da função que descreve a primeira ocorrência de cada *PG* será o primeiro ponto a ser analisado. O segundo tratará especificamente dos números *PGs* que ocorrem de forma consecutiva, por exemplo, ([…],6, 6,[...]) etc. Depois, com base na sequência de *PG*, será derivada uma nova sequência do intervalo entre os *PGs*, que será chamada de intervalo entre *PGs*, (ou a sigla *IPG*), estudando superficialmente suas propriedades e propondo outra conjectura quanto ao seu comportamento. Por fim, com base em uma nova sequência derivada dos *IPG* e análise de seu comportamento, será proposta outra conjectura que relaciona tal sequência com a constante de Brun. Para todo este estudo, é necessário ressaltar novamente, os dados principais que fundamentam a pesquisa foram obtidos através de algoritmos, de desenvolvimento dos próprios autores, tanto para a análise dos primos, quanto dos *PGs* e do intervalo entre os *PGs* etc, os quais necessitam de melhor revisão. Roga-se, então, aos leitores, que busquem revisar tais códigos, que seguem no ponto 2, replicar seus resultados, aumentar sua

[1] Diante desta informação, todas as vezes que nos referirmos ao intervalo entre primos, usaremos o termo *prime gap* ou a sigla *PG*, ou *prime gaps, PGs* .

quantidade, para melhor pôr a prova cada uma das conjecturas apresentadas aqui e/ou apresentar melhor demonstração do comportamento de tais sequências.

Algoritmos desenvolvidos para obtenção de dados para pesquisa: Utilizando a linguagem de programação C#, foram desenvolvidos os seguintes algoritmos / métodos para a estudo dos *PGs*. Ainda que outras linguagens possam ser mais apropriadas para melhorar a performance da análise, este autor preferiu utilizar uma linguagem que tivesse melhor familiaridade e qualificação, sendo esta o C#. Mesmo assim, tais algoritmos podem ser replicados e traduzidos para outras linguagens de programação pelo leitor. Seguem os principais métodos / algoritmos utilizados:

Algoritmo **(1)** para verificar se o número do input é primo:

```
public static bool CheckIfPrime(ulong number)
    {
        ulong counter = 0;
        double test1 = (number + 1) / 6;
        double test2 = (number - 1) / 6;
        if (number < 1) return false;
        if (number == 2) return true;
        if (number > 2 && number % 2 == 0 || number > 3 && number % 3 == 0 || number > 5 && number % 5 ==
0 || number > 7 && number % 7 == 0 || number > 11 && number % 11 == 0 || number > 13 && number % 13 == 0
|| number > 17 && number % 17 == 0 || number > 19 && number % 19 == 0 || number > 23 && number % 23 == 0
|| number > 29 && number % 29 == 0 || number > 31 && number % 31 == 0) return false;
        else if (test1 % 1 != 0 | test2 % 1 != 0) return false;
        else
        {
            for (ulong i = 1; i <= Math.Sqrt(number); i += 2) if (number % i == 0) counter++;
            if (counter == 1) return true;
            else return false;
        }
    }
```

Algoritmo **(2)** que verifica qual será o próximo número primo em relação ao número indicado no input:

```
public static ulong ProximoPrimo(ulong numero)
    {
        bool result;
            do
            {
                numero++;
                result = VerificarSePrimo(numero);
            } while (!result);

        return numero;
    }
```

Algoritmo **(3)** que indica a quantidade de números primos no intervalo definido:

```
public static ulong QtdPrimosEmIntervalo(ulong inicioVerificacao, ulong fimVerificacao)
    {
        ulong intervalo = fimVerificacao - inicioVerificacao;
        ulong qtdPrimos = 0;
        do
            {
                if (VerificarSePrimo(inicioVerificacao))
                    qtdPrimos++;
                inicioVerificacao++;
            } while (inicioVerificacao != fimVerificacao + 1);
        return qtdPrimos;
    }
```

Algoritmo **(4)** que retorna os *prime gaps* de um intervalo definido em um vetor do tipo ulong:

```
public static ulong[] PrimeGaps(ulong inicioVerificacao, ulong fimVerificacao)
    {
        ulong[] valores = new ulong[QtdPrimosEmIntervalo(inicioVerificacao, fimVerificacao)];
        ulong inicio = ProximoPrimo(inicioVerificacao);
        ulong proximo = ProximoPrimo(inicio);
        ulong intervalo = proximo - inicio;
        ulong i = 1;
        valores[0] = intervalo;
        while (proximo < fimVerificacao)
        {
            inicio = proximo;
            proximo = ProximoPrimo(inicio);
            intervalo = proximo - inicio;
            valores[i] = intervalo;
            i++;
        }
        return valores;
    }
```

Algoritmo **(5)** que verifica se existe na lista de *prime gaps* número que ocorra de forma consecutiva:

```
public static ulong EncontrarNumeroConsecutivoPrimeGap(ulong primeGap)
      {
         ulong inicioVerificacao = 0;
         ulong contador = 0;
         ulong intervalo;
         ulong intervaloAnt=0;
         ulong inicio;
         ulong proximo;
         bool resultado=true;
         do
         {
            inicio = ProximoPrimo(inicioVerificacao);
            proximo = ProximoPrimo(inicio);
            inicioVerificacao = proximo - 1;
            contador++;
            intervalo = proximo - inicio;
            if (intervaloAnt==primeGap&&intervalo==primeGap)
            {
               resultado = false;
            }
            else
            {
               intervaloAnt = intervalo;
               Console.Write(contador+", ");
            }
         } while (resultado);

         return contador;
      }
```

Algoritmo **(6)** indica a distância (quantidade de números que antecedem) entre o início da sequência de *prime gaps* e a primeira ocorrência de um valor escolhido:

```
public static ulong NumerosAtePrimeGap(ulong primeGap)
      {
         ulong inicioVerificacao = 0;
         ulong contador = 0;
         ulong intervalo;
         ulong inicio;
         ulong proximo;
         do
         {
            inicio = ProximoPrimo(inicioVerificacao);
            proximo = ProximoPrimo(inicio);
            inicioVerificacao = proximo-1;
            contador++;
            intervalo = proximo - inicio;
         } while (intervalo != primeGap);
         return contador-1;
      }
```

Algoritmo **(7)** retorna uma lista com as distâncias de ocorrência do *prime gap* escolhido até o twin prime 2:

```
public static List<string> ListaDistanciaDeCadaNumeroPrimeGap(ulong finalPrimeGap)
      {
         List<string> lista = new List<string>();

         if (finalPrimeGap % 2 != 0)
         {
            MessageBox.Show("O valor prime Gap deve ser par sempre!");
         }
         else
         {
            for (ulong i = 2; i <= finalPrimeGap; i+=2)
            {
               lista.Add(Convert.ToString(i) + ", " +
Convert.ToString(NumerosAtePrimeGap(i)));
            }
         }
         return lista;
      }
```

Algoritmo (8) retorna uma lista somente com a distância entre os *prime gaps* escolhidos.

```
public static long[] DistanciaEntrePrimeGaps(long primeGapNumero, ulong
                                   inicioVerificacao, ulong fimVerificacao)
    {
        long inicioVer = Convert.ToInt64(inicioVerificacao);
        long fimVer = Convert.ToInt64(fimVerificacao);

        long[] primeGaps = PrimeGapsArrayLong(inicioVer, fimVer);

        long qtdPrimos = QtdPrimosEmIntervaloLong(inicioVer, fimVer);

        long qtdRepeticoes = QtdRepeticoesArray(primeGaps, primeGapNumero);

        long[] soDistancia = new long[qtdRepeticoes];

        long contador = -1;
        int posicao = 0;

        for (long i = 0; i < qtdPrimos; i++)
        {
            contador++;
            if (primeGaps[i] == primeGapNumero)
            {
                soDistancia[posicao] = contador;
                contador = -1;
                posicao++;
                if (posicao == qtdRepeticoes)
                {
                    break;
                }
            }
        }

        return soDistancia;
    }
```

Conceitos Iniciais: Os *PGs* são uma sequência de números obtidos por meio da diferença entre dois números primos consecutivos, tais que $PG = p_{n+1} - p_n$, (em que *p* é um número primo), que resultam, por exemplo, em $PG_1 = 1, PG_2 = PG_3 = 2, PG_4 = 4$ etc. (WEISSTEIN, 2001). Deste modo, com o uso do algoritmo (4), para os primos a seguir, são definidos os 60 primeiros *PGs*, entre parênteses, como exemplo: Devido a importância dos números primos, foram criadas, desde a antiguidade, diversos meios de analisar padrões existentes quanto a estes números para assim propor explicações e conjecturas para a compreensão de seu comportamento.

Os *PGs* surgiram com este propósito principal, evoluindo com o tempo para se tornar uma matéria a parte com diversas e profundas propriedades e conjecturas importantes (NAZARDONYAVI, 2012).

|2, **(1)**, 3|, |3, **(2)**, 5|, |5, **(2)**, 7| , |7, **(4)**, 11| , |11, **(2)**, 13| , |13, **(4)**, 17| , |17, **(2)**, 19| , |19, **(4)**, 23| , |23, **(6)**, 29| , |29, **(2)**, 31| , |31, **(6)**, 37| , |37, **(4)**, 41| , |41, **(2)**, 43| , |43, **(4)**, 47| , |47, **(6)**, 53| , |53, **(6)**, 59| , |59, **(2)**, 61| , |61, **(6)**, 67| , |67, **(4)**, 71| , |71, **(2)**, 73| , |73, **(6)**, 79| , |79, **(4)**, 83| , |83, **(6)**, 89| , |89, **(8)**, 97| , |97, **(4)**, 101| , |101, **(2)**, 103| , |103, **(4)**, 107| , |107, **(2)**, 109| , |109, **(4)**, 113| , |113, **(14)**, 127| , |127, **(4)**, 131| , |131, **(6)**, 137| , |137, **(2)**, 139| , |139, **(10)**, 149| , |149, **(2)**, 151| , |151, **(6)**, 157| , |157, **(6)**, 163| , |163, **(4)**, 167| , |167, **(6)**, 173| , |173, **(6)**, 179| , |179, **(2)**, 181| , |181, **(10)**, 191| , |191, **(2)**, 193| , |193, **(4)**, 197| , |197, **(2)**, 199| , |199, **(12)**, 211| , |211, **(12)**, 223| , |223, **(4)**, 227| , |227, **(2)**, 229| , |229, **(4)**, 233| , |233, **(6)**, 239| , |239, **(2)**, 241| , |241, **(10)**, 251| , |251, **(6)**, 257| , |257, **(6)**, 263| , |263, **(6)**, 269| , |269, **(2)**, 271| , |271, **(6)**, 277| , |277, **(4)**, 281| , |281, **(2)**, 283|.

De forma resumida: 1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 6, 4, 6, 8, 4, 2, 4, 2, 4, 14, 4, 6, 2, 10, 2, 6, 6, 4, 6, 6, 2, 10, 2, 4, 2, 12, 12, 4, 2, 4, 6, 2, 10, 6, 6, 6, 2, 6, 4, 2.

Algumas de suas propriedade já largamente conhecidas são, por exemplo: O *PG* 1 só ocorre entre 2 e 3, sendo 2 o único primo par. Por consequência, todos os *PGs* subsequentes são números pares (WEISSTEIN, 2001). Só existe um par consecutivo de *PGs* 2, (ou seja: 2, 2), que ocorre entre os primos 3, 5, 7, porque 5 é o único primo terminado em 5 (WOLF, 2001).

Existe a conjectura, ainda não provada, de que o *PG* 2, também conhecido como Twin Prime, ocorre infinitas vezes. Foi demonstrado pelo matemático Yitang Zhang que existem infinitos *PGs* com intervalo menor ou igual a $7 * 10^7$. Uma pesquisa subsequente, pelo projeto Polimath, conseguiu estender seus resultados para 246 (ZHANG, 2014; POLIMATH, 2014).

A distância entre a origem e a ocorrência do Prime Gap (DistPG): Verificando a sequência de *PGs* e sua primeira ocorrência na lista, (que chamaremos de DistPG), e utilizando o algoritmo (7), foi possível construir a seguinte tabela 1, em que □ indica o *PG* e □ é a posição de sua primeira ocorrência na sequência de *PGs*, chamado DistPG:

Tabela 1: Tabela de DistPG (y), em quantidade de elementos antecessores, dos referidos prime gaps (x).

□	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
□	1	3	8	23	33	45	29	281	98	153	188	262	366	428	589	737	216

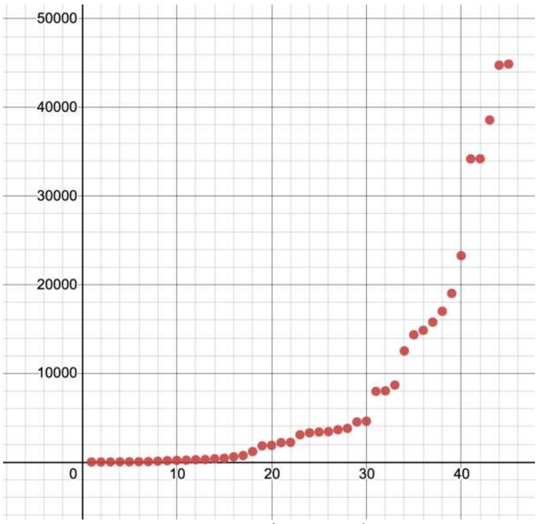
□	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64
□	1182	3301	2190	1878	1830	7969	3076	3426	2224	3792	8027	4611	4521	3643	8687

x	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90
y	14861	12541	15782	3384	34201	19025	17005	44772	23282	38589	14356	44902	34214

Fonte: Arquivo pessoal.

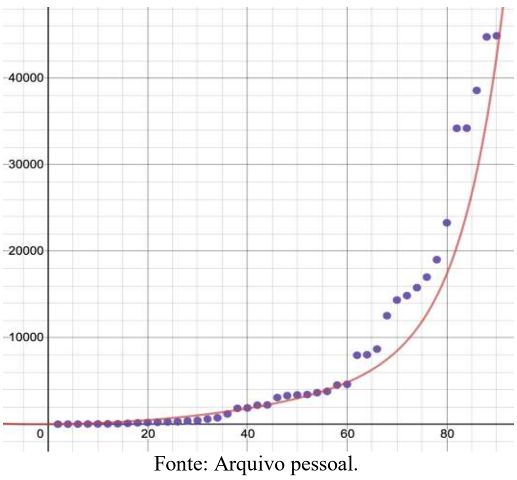
Note-se que, na tabela 1, a ocorrência de cada *PG* não segue uma forma crescente, mas cada *PG* pode ter intervalos muito menores ou maiores em relação a seus vizinhos. Por exemplo, vemos que o *PG* 72 ocorre após 3384 posições, no entanto, o *PG* 70 ocorre após 15.782 e *PG* 74 após 34.201. Sendo assim, aparentemente alguns *PGs* específicos ocorrem mais frequentemente do que outros.

Desta maneira, se os termos y forem colocados em ordem crescente, e forem alterados os valores de x para crescentes de 1 a 45, o gráfico da Figura 1 é formado:



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 1. Pontos da Tabela 1 plotados em gráfico, em valores crescentes



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 2. Gráfico da função [1], em vermelho, com os pontos da Tabela 1, em roxo.

Observando o gráfico acima, nota-se um possível padrão exponencial ou quadrático se formando. Pela análise dos dados, é possível levantar algumas suposições:

Conjectura: A função que descreve o crescimento do intervalo entre os primos, *DistPG*, segue um padrão possivelmente exponencial que tende ao quadrático, pela seguinte aproximação: **[1]** $y = b^x + x^2 + 3x$, para $x > 0$, considerando $b \rightarrow 1$, tal que as disparidades em alguns de seus intervalos serão reduzidos à medida que maiores *PGs* sejam computados, tendendo para uma função quadrática. Tomando a suposição acima e tendo como exemplo □ $= 1,12$, se obtém o seguinte gráfico:

É preciso deixar claro que a conjectura declarada acima e a equação proposta são apenas uma aproximação e não refletem valores exatos. Entretanto, permitem demonstrar o possível comportamento da função da distribuição dos DistPG. Roga-se ao leitor que estenda esta pesquisa e seus resultados.

A repetição consecutiva de números *Prime Gap:* Também foi possível verificar, pela análise dos dados obtidos com o algoritmo (5) e analiticamente com relação ao twin prime 2, (em que não existem repetições consecutivas, além do caso (3, 5, 7), conforme visto na introdução) (WOLF, 2001), que, ao contrário do twin prime 2, existem *PGs* que se repetem consecutivamente na sequência de *PGs.* Alguns dos exemplos encontrados foram os números 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, até 102. Por exemplo, o *PG* 6 é consecutivo, (6, 6), nas posições 15-16. O *PG* 12 é consecutivo, (12, 12), nas posições 46-47. Igualmente, o *PG* 24 é consecutivo nas posições 1.938-1.939, PG 48 nas posições 254.479-254.480 e o PG 96 nas posições 3.059.822-3.059.823. No entanto, os PGs 4, 8, 10, 14 e 16 foram analisados até a posição 1.000.000 da sequência e não foram encontradas ocorrências consecutivas. Com estes dados, é possível supor uma provável lógica para os números *PGs* que ocorrem de forma consecutiva:

Conjectura: Todo número **[2]** $PG_n = 6 + (n-1) \times 6$, (progressão aritmética), tal que $n \in N^*$, será um *prime gap* que terá termos consecutivos em sua sequência. Nenhum outro número além destes, exceto 2, se repetirá de forma consecutiva. Para a conjectura acima, foram utilizados os dados obtidos com o algoritmo (8). Tendo pesquisado os primeiros 10.000.000 termos dos PGs, apenas os números abaixo de PG 96 (este nas posições 3.059.821-3.059.822) foram encontrados nesta sequência. Mais termos do PG devem ser verificados para encontrar mais resultados. Portanto, o leitor é novamente convidado a auxiliar na obtenção de mais dados para apoiar ou refutar a conjectura acima.

Intervalo entre *Prime Gaps* (IPG): Outro meio de estudar os primos pode ser desenvolvido não somente com o estudo do intervalo entre estes, mas também com o intervalo entre o intervalo de primos, que usaremos a sigla *IPG*. Assim, são formadas três camadas, Figura 3, sendo a primeira a dos primos, a segunda dos *PGs* e a terceira do *IPG*:

Números primos:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59

Respectivos prime gaps:

1	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	6	6

Intervalo entre prime gaps:

1	0	2	-2	2	-2	2	-2	2	2	-4	4	-2	-2	0

Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 3. Tabelas representando três camadas, em que a primeira representa os números primos, seguida por seus respectivos prime gaps, seguido pelo intervalo entre os prime gaps.

Note-se com esta nova camada que, se desconsiderarmos o primeiro elemento, 1, o somatório de todos os elementos no *IPG* sempre tende a 0. Ou seja, sempre que elementos positivos aparecem, haverão elementos posteriores negativos equivalentes que se anulam. Assim, mesmo que em algum ponto o somatório não seja 0, continuando a soma dos próximos termos, o somatório será 0. Portanto, observa-se aqui a existência de ciclos nos *PGs* tal que o twin prime 2, que não ocorre de forma consecutiva exceto uma vez (WOLF, 2001), deverá voltar a ocorrer. Desse modo, conclui-se que se existem primos subsequentes que ocorrem com intervalo maior que 2, haverá inevitavelmente entre os próximos pares de primos outro par com intervalo 2, e este, obrigatoriamente, se seguirá por 1 par de primos que necessariamente não terá intervalo 2.

Intervalo entre prime gaps:

1	0	2	-2	2	-2	2	-2	2	2	-4	4	-2	-2	0

Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 4. O somatório dos termos do IPG, exceto o primeiro termo 1, é igual a 0

Analisando a Figura 4, e conforme discorrido acima, a soma dos n termos IPG, expresso abaixo em [3], será 0:

$$IPG = \sum_{n=2}^{\infty} IPG_n = 0 \qquad (3)$$

Ou seja, os *PGs* existentes sempre convergirão para o *PG* 2. Assim sendo, é útil ter uma sequência com o intervalo da ocorrência do twin prime 2 na sequência de *PGs.* Chamaremos esta nova sequência de intervalos entre o twin prime 2, (*ITP2*). Os primeiros 102 termos desta nova sequência são: 0, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 5, 1, 4, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 4, 2, 3, 4, 11, 1, 5, 8, 5, 4, 3, 2, 3, 19, 1, 1, 3, 3, 18, 1, 2, 1, 3, 7, 10, 4, 2, 2, 2, 9, 4, 3, 1, 16, 2, 5, 2, 2, 8, 8, 1, 5, 1, 5, 4, 5, 1, 2, 1, 2, 8, 3, 6, 2, 6, 19, 3, 6, 5, 4, 2, 6, 2, 19, 1, 13, 3, 9, 1, 2, 5, 3, 1, 1, 6, 1, 5, 2, 2, 2, 10, 11, 5, 3, 7, 2.[2] Para entendê-la, façamos uma análise de seus primeiros termos: Entre a primeira ocorrência e a segunda do twin prime 2, não houve intervalo, portanto temos 0, visto que os números eram consecutivos. No segundo termo, temos 1, pois havia um número entre os *PGs* 2, (eg: 2, **X**, 2 - em que X é um número *PG* não explícito aqui), e assim sucessivamente. Conclui-se, pois, que mesmo havendo grandes intervalos entre os *PGs* 2, eles sempre convergirão novamente para 2, conforme já foi afirmado. Logo, é possível conjecturar, com base em [3], que:

Conjectura: O infinitésimo termo *PG*, (ou seja, o último), deverá ser 2. Consequentemente, os twin primes 2 ocorre infinitas vezes na sequência de primos, já que está provado que existem infinitos números primos, (FURSTENBERG, 1955). É preciso destacar que, ainda que já exista uma conjectura famosa para a ocorrência infinita dos twin primes 2, (DE POLIGNAC, 1849; NAZARDONYAVI, 2012), a que aqui foi apresentada se fundamenta da veracidade, *não comprovada*, do somatório [3] do *IPGs*. Ou seja, se este for verdadeiro, consequentemente os twin primes 2 ocorrem infinitas vezes.

Constante de Brun (B_2)

O teorema de Brun, demonstrado em 1915 por Viggo Brun (BRUN, 1915), na teoria dos números, declara que a soma da recíproca dos twin primes (par de números primos com intervalo 2) converge para um valor finito conhecido como constante de Brun (SEBAH, 2002):

$$\sum_{p:\,p+2\in P}^{\infty} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right) = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\ldots = 1.902160578\ldots \tag{4}$$

Aplicando a diferença entre os termos Y(DistPG) da Tabela 1, colocando-os em ordem crescente, subtraindo o segundo valor pelo primeiro ($Z_n = DistPG_{n+1} - DistPG_n$) e então dividindo o seu segundo valor pelo primeiro ($W_n = \frac{Z_{n+1}}{Z_n}$), a média aritmética $\underline{x}$ da soma de todos os valores W *aparentemente* tende à constante de Brun (B_2). Cf. Tabela 2.

Tabela 2. Tabela com a formação da sequência *W*, que possivelmente tem sua média aritmética tendendo a constante de Brun

Prime Gaps (PM)	2	4	6	8	14	10	12	18	20	22	34	24	16	26	28	30	32	36	44	42	40	48	38	50
DistPG	1	3	8	23	29	33	45	98	153	188	216	262	281	366	428	589	737	1182	1830	1878	2190	3076	3301	3426
Z (Intervalo DistPG)	2	5	15	6	4	12	53	55	35	28	46	19	85	62	161	148	445	648	48	312	886	225	125	
W	2,5	3	0,4	0,6667	3	4,4167	1,0377	0,6364	0,8	1,6429	0,413	4,4737	0,7294	2,5968	0,9193	3,0068	1,4562	0,0741	6,5	2,8397	0,254	0,5556	**MÉDIA:**	**1,905396**

Fonte: Arquivo pessoal.

$$\text{Conjectura: } \underline{W} \quad \rightarrow B_2 \tag{5}$$

Novamente, roga-se aos leitores para que contribuam com a ampliação destes resultados, que exige computação e a análise de grande volume de cálculos e números, para que seja possível melhor fundamentar a conjectura acima ou refutá-la.

Considerações Finais: Neste trabalho foram apresentadas conjecturas com base em dados preliminares da análise dos *PGs*. Por meio da análise desses dados obtidos com a ajuda dos algoritmos referenciados, foi possível construir algumas conjecturas preliminares que buscam a melhor compreensão dos números primos e dos *PGs*. A primeira delas busca aproximar-se da função provável para o comportamento do gráfico referente às distâncias da primeira ocorrência de cada *PG, DistPG*. A segunda conjectura tenta determinar quais números da sequência dos *PGs* ocorrem de forma consecutiva. A terceira conjectura baseia-se na construção de uma nova sequência de números chamada de intervalo entre prime gaps (IPG), e com base nos dados obtidos, conjecturar que seu somatório é igual a 0. Consequentemente, afirma-se que os prime twins 2 ocorrem infinitas vezes. Finalmente, foi possível conjeturar que a constante de Brun aparentemente está presente na média aritmética dos valores da sequência W. Sendo as conjecturas apresentadas aqui ainda pouco fundamentadas, consequentemente, há uma redução considerável de sua confiabilidade. Isto se deve à dificuldade na obtenção de mais dados, que exigem melhores equipamentos e algoritmos para análise de dados. Ainda assim, elas podem formar uma base inicial para futuras pesquisas que visem aprofundar os resultados obtidos, quer para fundamentar, corrigir ou refutar as conjecturas aqui apresentadas.

REFERÊNCIAS

BRUN, Viggo. (1815). Uber das goldbachsche gesetz und die anzahl der primzahlpaare. Arch. Mat. Natur. B, 1915.

CRAMÉR, Harald.(1936). On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers. Acta Arithmetica, v. 2, p. 23-46.

DE POLIGNAC, Prince Alphonse. (1852). Recherches nouvelles sur les nombres premiers.

ERDŐS, Paul et al. (Ed.). (1997). Combinatorics, Geometry and Probability: A Tribute to Paul Erdös. Cambridge University Press.

FORD, Kevin et al.(2014). Long gaps between primes. arXiv preprint arXiv:1412.5029, 2014.

FURSTENBERG, Harry. (1955). On the infinitude of primes. Amer. Math. Monthly, v. 62, n. 5, p. 353.

GRANVILLE, Andrew. (1995a). Harald Cramér and the distribution of prime numbers. Scandinavian Actuarial Journal, v. 1995, n. 1, p. 12-28.

GRANVILLE, Andrew, (1995b). Unexpected irregularities in the distribution of prime numbers. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Birkhäuser, Basel, p. 388-399.

INGHAM, Albert Edward. (1937). On the difference between consecutive primes. The Quarterly Journal of Mathematics, n. 1, p. 255-266.

[2] Soma 441. Desvio padrão: 4,139071893. Média: 4,323529412. Mediana: 3. Moda: 2.

MAYNARD, James. (2016). Large gaps between primes. annals of Mathematics, p. 915-933.
NAZARDONYAVI, Sadegh. (2012). Some history about twin prime conjecture. arXiv preprint arXiv:1205.0774.
NEUKIRCH, Jürgen.(2013). Algebraic number theory. Springer Science & Business Media.
PINTZ, János, (1997) Very large gaps between consecutive primes. journal of number theory, v. 63, n. 2, p. 286-301.
POLYMATH, D. H. J. (2014). Bounded gaps between primes, Polymath 8 Project.
SEBAH, Pascal; GOURDON, Xavier. (2002). Introduction to twin primes and Brun’s constant computation. available from the authors’ website at the URL http://numbers. computation. free. fr/Constants/constants. html.
STILLWELL, John, (2002). Mathematics and its History. The Australian Mathem. Soc, p. 168.
TCHUDAKOFF, Nikolai, 1936). On the difference between two neighbouring prime numbers. Математический сборник, v. 1, n. 6, p. 799-814.
WEISSTEIN, Eric W. (2001). Prime Gaps. https://mathworld. wolfram. com/.
WOLF, Marek, (2001). Some Remarks on the Distribution of twin Primes. arXiv preprint math/0105211.
ZHANG, Yitang. (2014). Bounded gaps between primes. Annals of Mathematics, p. 1121-1174.

****